



# Parametrização unidimensional de campos de velocidades sísmicas por ondaleta de Morlet.

Ildeson P. Bastos\*, UFBA, Salvador, BA, Brasil  
Wilson M. Figueiró, CPGG-IGEO-UFBA, Salvador, BA, Brasil

Copyright 2013, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 13<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, August 26-29, 2013.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 13<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

## Abstract

This study uses different mathematical strategies in order to represent functions by parameters of a wavelet series. Thus, we can use models defined by series coefficients. These coefficients parameterize models, making modeling and inversion possible. The main objective is the one-dimensional representation of seismic compressional velocity fields, parameterized by the real part of the Morlet wavelet, for different geological situations. Although 1D, such fields denote simultaneous variations in vertical and horizontal directions. Unlike the more common wavelets, the basis formed by daughters Morlet wavelets is not orthonormal. Then, the calculations to obtain the coefficients are developed by Least Squares Fitting. The approximation of the velocity field obtained by this technique depends on the range of indices used in the series, which directly influences on the quality of the model parameterization.

**Keywords:** Morlet wavelet, parameterization, seismic velocity field and series coefficients.

## Resumo

Neste trabalho utiliza-se diferentes estratégias matemáticas com a finalidade de representar parametricamente funções através de séries ondaleta. Deste modo, pode-se dispor de modelos definidos por coeficientes da série que os parametrizam para a realização de possíveis modelagens. O objetivo principal é a representação unidimensional de campos de velocidades sísmicas compressoriais parametrizados pela parte real da ondaleta de Morlet, em diferentes situações geológicas. Embora 1D, eventualmente, tais campos denotam variações simultâneas nas direções vertical e horizontal. Diferentemente das ondaletas comuns, a base construída pelas ondaletas-filhas utilizadas não é ortonormal, o que levou os cálculos, para obtenção dos coeficientes, a serem desenvolvidos através de ajustes pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). A aproximação do campo de velocidades, obtida por essa técnica, depende do intervalo de variação dos índices usados nas séries, o que influencia diretamente na qualidade da parametrização do modelo.

**Palavras-chave:** ondaleta de Morlet, parametrização, campo de velocidades sísmicas e coeficientes de séries.

## Introdução

A geologia de subsuperfície tem, comumente, um caráter qualitativo, o que impede o tratamento matemático de seus modelos. Visando superar tal impedimento, faz-se necessário torná-los quantitativos. Para tanto, é relevante representar o campo proveniente de um modelo geológico através de parâmetros numéricos. Isto é, realizar a parametrização do modelo. Que pode ser: matricial, polinomial, senoidal (Fourier), por *splines*, por ondaletas e outras (Santana & Figueiró, 2008). Dentre as diversas propriedades físicas dos meios rochosos, o presente trabalho considera apenas a velocidade sísmica compressional como aquela a ser parametrizada pela ondaleta de Morlet.

É nesse contexto que as ondaletas aparecem e se referem a um conjunto de funções com forma de pequenas ondas geradas por dilatações e translações de uma função simples de variável real, algumas vezes chamadas de ondaleta-mãe. As funções derivadas são denominadas ondaletas-filhas, ou simplesmente ondaletas (Weng & Lau, 1994). Tais funções formam uma base que não precisa ser necessariamente ortogonal, que é o caso da ondaleta de Morlet.

Devido ao fato da base de Morlet constituída pelas ondaletas-filhas não ser ortonormal, os coeficientes tiveram de ser obtidos através de ajustes pelo Método dos Mínimos Quadrados.

## Aspectos Teóricos Básicos

O termo ondaleta refere-se a um conjunto de funções com forma de pequenas ondas geradas a partir de dilatações e translações de uma função simples,  $\psi(t)$ , de variável real  $t$ , algumas vezes chamada de função ondaleta ou ondaleta-mãe. As ondaletas-filhas são definidas como funções do tipo  $\psi_{j,k}$ , geradas a partir de uma dilatação binária  $2^j$  e uma translação diádica  $k2^j$ . A idéia é levar em conta as dilatações, compressões e translações de uma única função, produzindo funções da seguinte forma (Moretton, 1999):

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j \text{ e } k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Tais funções formam uma base que não precisa ser necessariamente ortogonal, que é o caso da ondaleta de Morlet. No entanto, é importante ressaltar que existem vantagens ao se trabalhar com bases de ondaletas que sejam ortogonais porque desta forma é possível reconstruir perfeitamente o sinal original, onde cada coeficiente é calculado como o produto interno do sinal com uma função da base.

Com a utilização da ondaleta Morlet, os coeficientes são obtidos através de ajustes pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

Sendo assim, uma vez que o sistema  $(\psi_{j,k})$  é uma base de  $L^2(\mathbb{R})$ , existem coeficientes  $(c_{j,k})$  que tornam possível uma representação de  $f(t)$  como:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (2)$$

A Eq. (2) é denominada série de ondaletas de  $f(t)$ .

$$\mathbf{c} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{f}, \quad (3)$$

onde  $\mathbf{c}$  é o vetor dos coeficientes da série dada na Eq. (2),  $\mathbf{f}$  é um vetor dado pela função  $f(t)$  discretamente amostrada nos nós de uma discretização escolhida, e  $\Psi$  é a matriz dos valores assumidos por  $\psi_{j,k}$  nos referidos nós.

A Eq. (3) decorre de:

$$\mathbf{f} = \Psi \mathbf{c}, \quad (4)$$

onde

$$\mathbf{f} = [f(t_1) \ f(t_2) \ f(t_3) \ \dots \ f(t_N)]^T, \quad (5)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{j_i, k_i}(t_1) & \dots & \psi_{j_i, k_f}(t_1) & \dots & \psi_{j_f, k_i}(t_1) & \dots & \psi_{j_f, k_f}(t_1) \\ \psi_{j_i, k_i}(t_2) & \dots & \psi_{j_i, k_f}(t_2) & \dots & \psi_{j_f, k_i}(t_2) & \dots & \psi_{j_f, k_f}(t_2) \\ \psi_{j_i, k_i}(t_3) & \dots & \psi_{j_i, k_f}(t_3) & \dots & \psi_{j_f, k_i}(t_3) & \dots & \psi_{j_f, k_f}(t_3) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \psi_{j_i, k_i}(t_N) & \dots & \psi_{j_i, k_f}(t_N) & \dots & \psi_{j_f, k_i}(t_N) & \dots & \psi_{j_f, k_f}(t_N) \end{bmatrix} \quad (6)$$

e

$$\mathbf{c} = [c_{j_i, k_i} \ \dots \ c_{j_i, k_f} \ \dots \ c_{j_f, k_i} \ \dots \ c_{j_f, k_f}]^T. \quad (7)$$

Sendo  $(j_i$  e  $k_i)$  os valores mínimos dos índices ( $j$  e  $k$ ),  $(j_f$  e  $k_f)$  os seus máximos e  $\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_N\}$  o conjunto dos nós da discretização.

A ondaleta de Morlet é dada por (Kumar & Foufoula-Georgiou, 1994):

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} (e^{-iw_0 t - e^{-t^2/2}}) e^{-t^2/2}, \quad (8)$$

onde, se  $w_0 \geq 5$ , pode ser aproximada por:

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{-iw_0 t} e^{-t^2/2}. \quad (9)$$

Tendo em vista que o campo de velocidades é uma função real, apenas a parte real da ondaleta foi considerada, isto é:

$$\psi(t) = \text{Re} \left\{ \frac{e^{-iw_0 t} e^{-t^2/2}}{\pi^{1/4}} \right\} = \frac{\cos(w_0 t) e^{-t^2/2}}{\pi^{1/4}}. \quad (10)$$

Utilizou-se  $w_0 = 5$ , tal como mostrado na Figura 1.

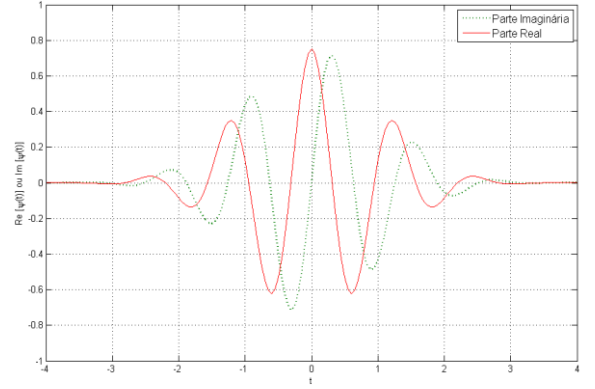


Figura 1 – Representação gráfica das partes real e imaginária da função ondaleta de Morlet  $\psi(t)$  definida pela Eq. 9, para  $w_0 = 5$ .

As ondaletas-filhas provenientes da função ondaleta de Morlet, com  $j$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , são dadas por:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \pi^{-1/4} \cos[w_0(2^j t - k)] e^{-(2^j t - k)^2/2}. \quad (11)$$

Com a finalidade de obter respostas sobre as similaridades entre os campos original e parametrizado, realizou-se os cálculos das diferenças relativas entre os tais campos através da equação:

$$\delta = \left( \frac{V(t) - V_p(t)}{V(t)} \right) 100, \quad (12)$$

onde  $\delta$  é o valor percentual da diferença relativa entre  $V$  e  $V_p$ , que correspondem, respectivamente, aos campos de velocidades: original e parametrizado.

Com o propósito de observar a magnitude dos coeficientes, este trabalho, produziu para cada modelo, o gráfico que representa o comportamento dos valores de  $c_{j,k}$ , em função de alguma expressão matemática dependente de  $j$  e  $k$ .

## Resultados

### Parametrização do Campo de Velocidades Sísmicas Unidimensional com variação radial linear ( $M_1$ )

O modelo original  $M_1$  (Figura 2) é caracterizado pela variação radial do campo de velocidades sísmicas e em termos geológicos pode ser interpretado como uma anticlinal esquemática que obedece a equação  $V_1 = 8 - \frac{7}{R} r$ , onde  $R = 4\sqrt{2}$  representa a máxima distância radial do modelo e  $r$  é contado a partir do ponto  $(x, y) = (4, 4)$  considerando  $x$  como a distância horizontal e  $z$  a profundidade no modelo, ambas em km. Embora  $M_1$  exiba variações em termos de coordenadas cartesianas  $x$  e  $z$ , não se pode afirmar que se trata de um autêntico modelo 2D, pois em termos radiais sua variação é unidimensional.

Portanto, tal modelo é tratado como dependendo apenas da distância radial  $r$ , isto é 1D, onde  $r(x, z) = \sqrt{(x-4)^2 + (z-4)^2}$ .

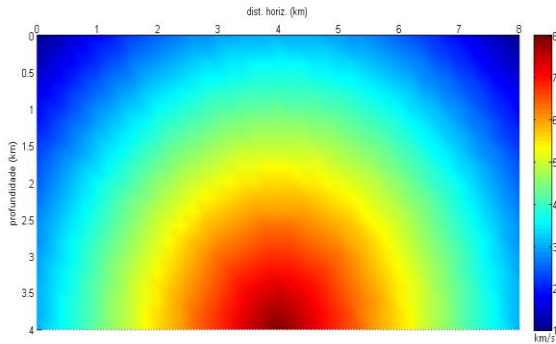


Figura 2 – Representação do modelo original  $M_1$  com variação de velocidades entre 1,0 e 8,0 km/s.

A parametrização de  $M_1$  com apenas 15 coeficientes,  $M_{P_{1,A}}$  (Figura 3) exibe um comportamento peculiar nas regiões onde a distancia radial se aproxima da máxima, apresentando até mesmo valores negativos de velocidades próximo aos pontos (0,0) e (0,8) km.

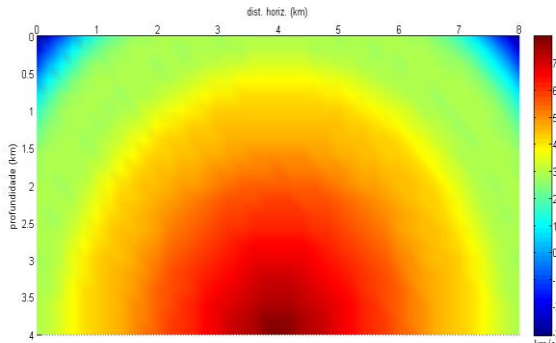


Figura 3 – Modelo  $M_{P_{1,A}}$ : Representação de  $M_1$  parametrizado por Morlet com  $-2 \leq j \leq 2$  e  $-1 \leq k \leq 1$ , totalizando 15 coeficientes.

De acordo com a Figura 4, quando  $r$  se aproxima de  $R$ , os valores das velocidades chegam a um mínimo de  $-3$  km/s (resultado sem sentido, pois as velocidades sísmicas são positivas e, portanto, completamente aquém do esperado).

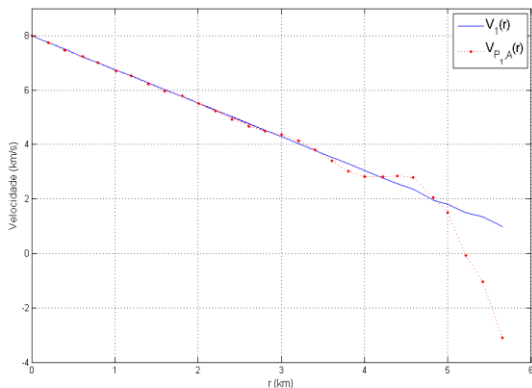


Figura 4 – Comparação entre  $V_1(r)$  e  $V_{P_{1,A}}(r)$  em função da distância radial  $r$  para 15 coeficientes.

O gráfico da diferença relativa (Figura 5) fornece informações referente ao quantitativo da discrepância entre  $V_1(r)$  e  $V_{P_{1,A}}(r)$ . Entretanto, devido às limitações gráficas esses valores podem ser observados apenas num intervalo entre  $[-20, 40]$  %.

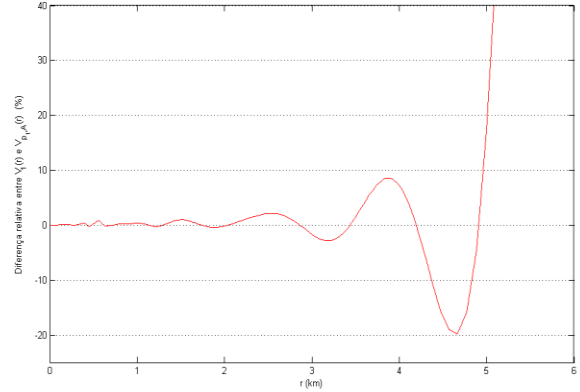


Figura 5 – Diferença relativa entre  $V_1(r)$  e  $V_{P_{1,A}}(r)$  em função da distância radial  $r$  para 15 coeficientes.

Em conseqüência da precária efetividade da parametrização para 15 coeficientes e tendo em vista que a forma do modelo parametrizado  $M_{P_{1,A}}$  obedeceu a do original, alterou-se o intervalo de variação do índice de translação  $k$ , em busca de resultados mais aceitáveis. O modelo  $M_1$  parametrizado a partir da utilização de 25 coeficientes é denominado  $M_{P_{1,B}}$  (Figura 6).

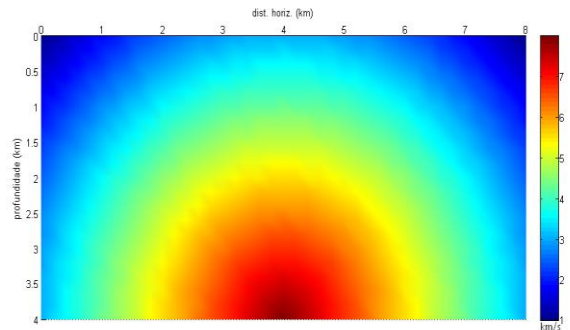


Figura 6 – Modelo  $M_{P_{1,B}}$ : Representação de  $M_3$  parametrizado por Morlet com  $-2 \leq j$  e  $k \leq 2$ , totalizando 25 coeficientes.

A parametrização com a utilização de 25 coeficientes proporcionou resultados muito superiores em níveis quantitativos e qualitativos como pode ser visto no gráfico de comparação (Figura 7).

A diferença relativa entre  $V_1(r)$  e  $V_{P_{1,B}}(r)$  (Figura 8) não excede 0,2 %. O que leva a conclusão que com o acréscimo de mais 10 coeficientes o processo revelou uma aproximação que atingiu cerca de 99 % do campo original.

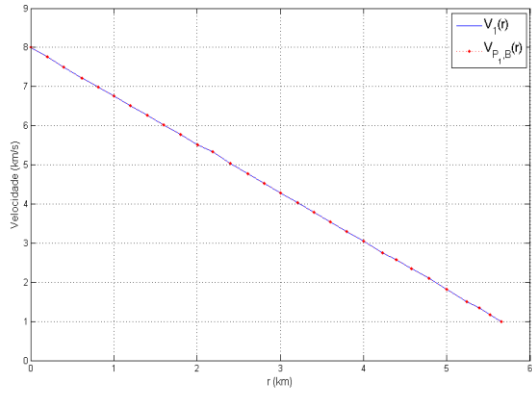


Figura 7 – Comparação entre  $V_1(r)$  e  $V_{P_1,B}(r)$  em função da distância radial  $r$  para 25 coeficientes.

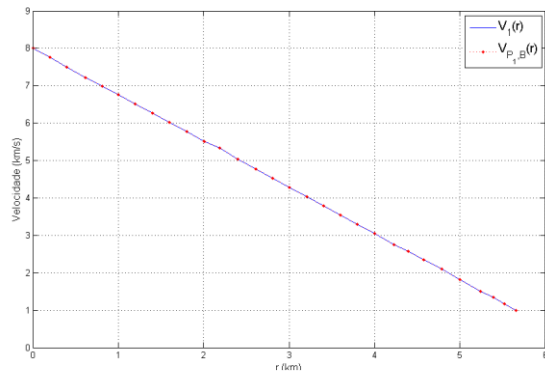


Figura 8 – Diferença relativa entre  $V_1(r)$  e  $V_{P_1,B}(r)$  em função da distância radial  $r$  para 25 coeficientes.

Os gráficos que exibem os comportamentos dos coeficientes são exibidos nas Figuras 9 e 10.

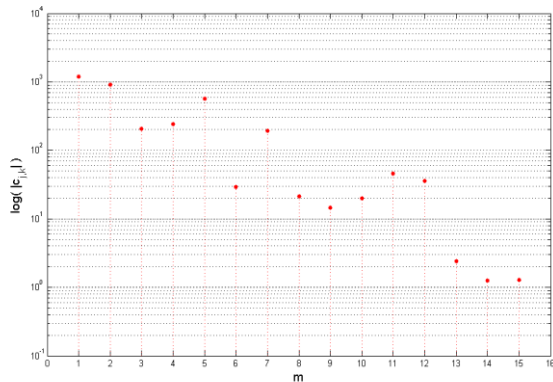


Figura 9 – Representação gráfica de  $\log(|c_{j,k}|)$ , sendo os  $c_{j,k}$ 's gerados através de ajuste pelo MMQ para a obtenção de  $M_{P_1,A}$  através da parametrização de  $M_1$ . O eixo horizontal é ordenado segundo valores crescentes de  $m = j + 5k + 8$ . Foram utilizados 15 coeficientes com  $-2 \leq j \leq 2$  e  $-1 \leq k \leq 1$ .

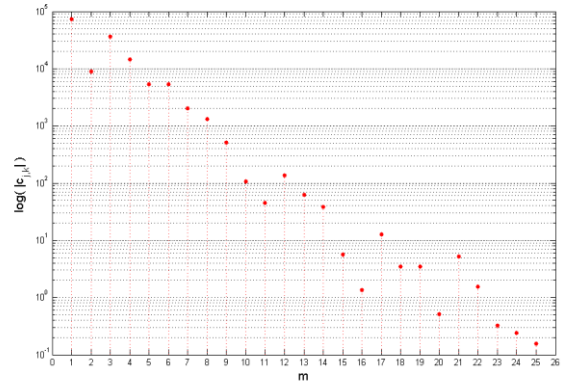


Figura 10 – Representação gráfica de  $\log(|c_{j,k}|)$ . O eixo horizontal é ordenado segundo valores crescentes de  $m = j + 5k + 13$ . Foram utilizados 25 coeficientes com  $-2 \leq j$  e  $k \leq 2$ .

### Parametrização do Campo de Velocidades Sísmicas Unidimensional com variação diagonal ( $M_2$ )

O modelo  $M_2$  pode ser tomado como um pacote litológico composto por camadas paralelas e inclinadas. De acordo com a Figura 11, a velocidade varia nas direções  $x$  e  $z$ .

Para um modelo tal como  $M_2$ , a velocidade é dada por  $V_2(d) = V_0 + cd$ , onde  $V_0$  é a velocidade na origem,  $d$  é a distância da origem a cada uma das retas inclinadas de velocidade constante que definem o modelo, e  $c$  um coeficiente constante que não deve permitir que as velocidades no modelo fiquem fora de um determinado intervalo de valores. Genericamente,  $d(x, z)$  é dado pelo produto interno  $\left(\frac{x_0}{D}, \frac{z_0}{D}\right) \cdot (x, z)$ , onde  $(x_0, z_0)$  é um ponto de referencia arbitrariamente escolhido no domínio do modelo e  $D = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$  a sua distância à origem. Sendo assim, temos  $d(x, z) = \frac{x_0}{D}x + \frac{z_0}{D}z$ .

Em particular, se fizermos  $(x_0, z_0) = (3, 4)$ , teremos  $D = 5$  e, portanto  $d(x, z) = \frac{1}{5}(3x + 4z)$ . Assim, se fizermos  $V_0 = 2$  km/s e estipularmos a máxima velocidade que ocorre no modelo como 8,4 km/s, o campo de  $M_2$  fica unidimensionalmente regido por  $V_2(d) = 2 + \frac{4}{5}d$ , pois o  $d_{max} = \left\langle \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \middle| (8, 4) \right\rangle = 8$ .

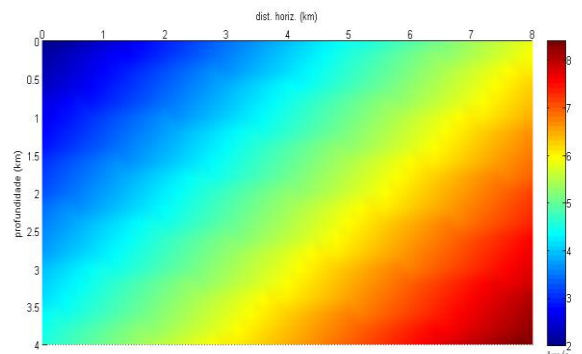


Figura 11 – Representação do modelo original  $M_2$  com variação de velocidades entre 2,0 e 8,4 km/s.



Por intermédio da parametrização de  $M_2$  com a utilização da série ondaleta de Morlet,  $M_{P_{2,A}}$  (Figura 12) foi produzido dentro de um intervalo de índices representado por  $-2 \leq j \leq 2$  e  $-1 \leq k \leq 1$ , envolvendo um total de 15 coeficientes.

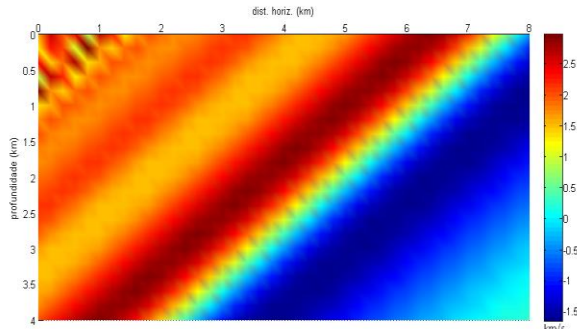


Figura 12 – Modelo  $M_{P_{2,A}}$ : Representação de  $M_2$  parametrizado por Morlet com  $-2 \leq j \leq 2$  e  $-1 \leq k \leq 1$ , totalizando 15 coeficientes.

Os gráficos de comparação (Figura 13) e diferença relativa (Figura 14) entre  $V_2(d)$  e  $V_{P_{2,A}}(d)$  exibem resultados longe do que se pode conceituar como admissível.

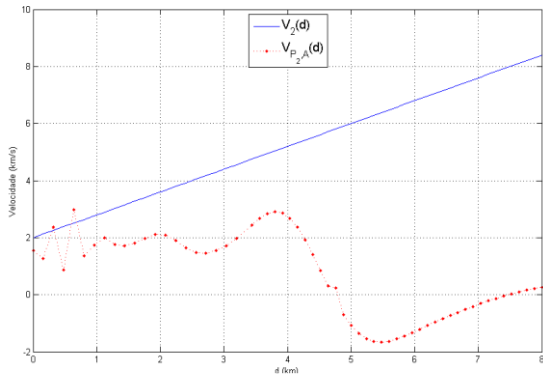


Figura 13 – Comparação entre  $V_2(d)$  e  $V_{P_{2,A}}(d)$  em função da distância radial  $d$  para 15 coeficientes.

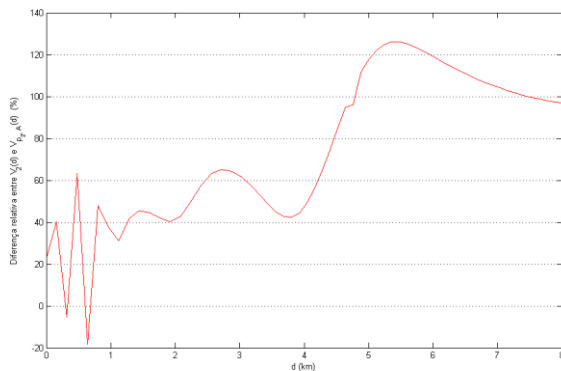


Figura 14 – Diferença relativa entre  $V_2(d)$  e  $V_{P_{2,A}}(d)$  em função da distância radial  $d$  para 15 coeficientes.

Visando angariar progressos nas respostas originadas pela série ondaleta de Morlet, o número de coeficientes

foi aumentado para 25, o que estruturou o modelo  $M_{P_{2,B}}$  mostrado na Figura 15.

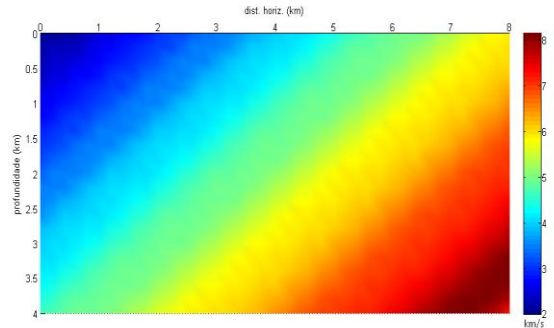


Figura 15 – Modelo  $M_{P_{2,B}}$ : Representação de  $M_2$  parametrizado por Morlet com  $-2 \leq i$  e  $k \leq 2$ , totalizando 25 coeficientes.

Notoriamente, a evolução ocorreu devido à inclusão de mais coeficientes na série ondaleta e para atestar de maneira, não apenas qualitativa, mas também numérica, as Figuras 16 e 17 projetam a aproximação alcançada.

Ainda que a melhora tenha sido excepcional (com a diferença relativa não excedendo 3% para  $d \leq 7,6$  km), no trecho onde  $d$  se aproxima de 8 km, a disparidade é consideravelmente elevada. No entanto, este intervalo não invalida a melhora que é obtida com o aumento do número de índices que regulam a translação na função ondaleta de Morlet.

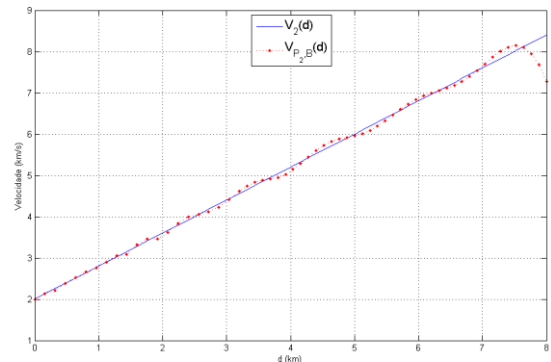


Figura 16 – Comparação entre  $V_2(d)$  e  $V_{P_{2,B}}(d)$  em função da distância radial  $d$  para 25 coeficientes.

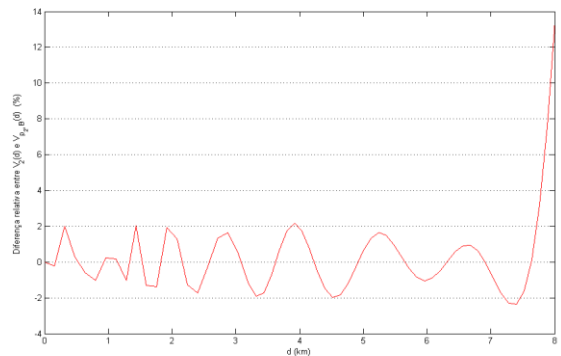


Figura 17 – Diferença relativa entre  $V_2(d)$  e  $V_{P_{2,B}}(d)$  em função da distância radial  $d$  para 25 coeficientes.

Os gráficos que exibem os comportamentos dos coeficientes são exibidos nas Figuras 18 e 19.

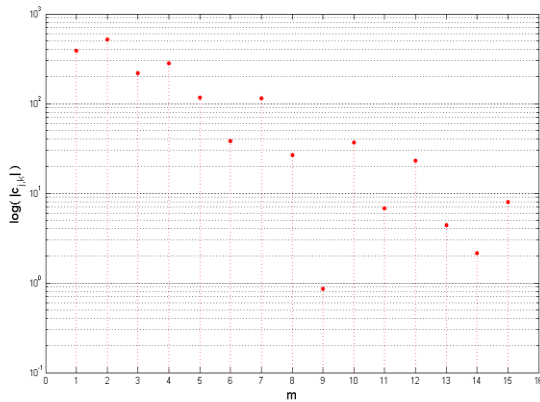


Figura 18 – Representação gráfica de  $\log(|c_{j,k}|)$ , sendo os  $c_{j,k}$ 's gerados através de ajuste pelo MMQ para a obtenção de  $M_{P2,A}$  através da parametrização de  $M_2$ . O eixo horizontal é ordenado segundo valores crescentes de  $m = j + 5k + 8$ . Foram utilizados 15 coeficientes com  $-2 \leq j \leq 2$  e  $-1 \leq k \leq 1$ , o que implica em  $1 \leq m \leq 15$ .

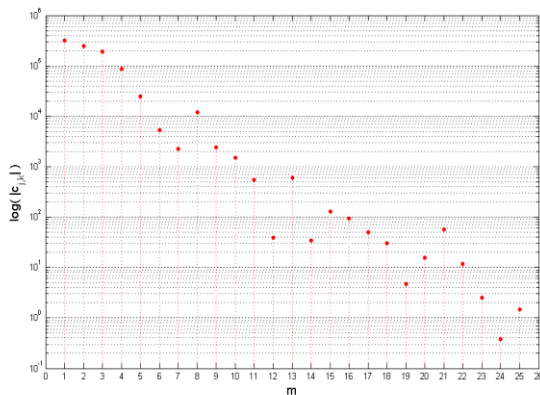


Figura 19 – Representação gráfica de  $\log(|c_{j,k}|)$ , sendo os  $c_{j,k}$ 's gerados através de ajuste pelo MMQ para a obtenção de  $M_{P2,B}$  através da parametrização de  $M_2$ . O eixo horizontal é ordenado segundo valores crescentes de  $m = j + 5k + 13$ . Foram utilizados 15 coeficientes com  $-2 \leq j$  e  $k \leq 2$ , o que implica em  $1 \leq m \leq 25$ .

## Discussão e Conclusões

Foi possível observar, através dos resultados obtidos, que a parte real da ondaleta de Morlet representa funções 1D (pseudo-2D) de forma significativa, atingindo o objetivo de representar as características mais gerais dos campos de velocidades sísmicas compressoriais. Tal base, porém, não realiza parametrizações de modo exato, considerando o fato das funções representadas poderem não pertencer ao espaço gerado pela mesma base.

O aumento do número de índices  $j$  e  $k$  melhora a qualidade da aproximação produzida pela parametrização.

A ressalva incomum é a ordem de grandeza exacerbada que os valores numéricos dos coeficientes atingiram. Como o trabalho não visou a análise da influência de desses coeficientes, sugere-se, o desenvolvimento de uma pesquisa para a investigação de tal singularidade.

As parametrizações referentes à utilização de 15 coeficientes alcançaram uma aproximação mais modesta em relação aos modelos originais. Enquanto que aquelas parametrizadas com 25 coeficientes apresentaram resultados satisfatórios.

As velocidades utilizadas nos modelos deste trabalho contemplam um vasto espectro de velocidades encontradas na exploração sísmica, conferindo um maior realismo aos modelos apresentados.

## Agradecimentos

Agradecemos ao CPGG-UFBA e à Rede de Geofísica Aplicada do CENPES-PETROBRAS pelo oferecimento de condições para a realização deste trabalho.

## Referências

- Moretin, P.A.; 1999. Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas. EDUSP.
- Kumar, P. & Foufoula-Georgiou, E.; 1994. Wavelets in Geophysics. Academic Press, Inc.
- Santana, J.L.S. & Figueiró, W.M.; 2008. Diferentes Parametrizações do Campo de Velocidades Sísmicas do Modelo Geológico da Quebra da Plataforma Continental. 3º Simpósio Brasileiro de Geofísica, III SimBGf, Resumos Expandidos, Belém, PA, Brasil.
- Weng, H. & Lau, K.-M.; 1994. Wavelets, period doubling, and time-frequency localization with application to organization of convection over the tropical western pacific. Journal of the Atmospheric Sciences, **51**(17): 2523-2541.